УДК 519.213:517.518.11
DOI 10.35254/bsu/2024.70.01

Аалиева Б. А.
К.Карасаев атындагы БМУ,
ага окутуучу

Абдыкеримова А.Т.
К.Карасаев атындагы БМУ,
окутуучу

КӨЗ КАРАНДЫ ЭМЕС СЫНООЛОРДОГУ САЛЫШТЫРМА ЖЫШТЫКТЫН, ТУРУКТУУ ЫКТЫМАЛДУУЛУКТАН АЙЫРМАЛАНЫШЫНЫН ЫКТЫМАЛДУУЛУГУН ТАБУУДА ЛАПЛАСТЫН ИНТЕГРАЛДЫК ТЕОРЕМАСЫН КОЛДОНУУ МЕТОДИКАСЫ

Кыскача мазмуну

Чоң маалыматтарды иштетүүнүн заманбап маселелери статистикалык четтөөлөрдү баалоо ыкмаларын талап кылат. Көз каранды эмес сыноолордо окуянын салыштырма жыштыгынын туруктуу маанисинен четтөөсүнүн ыктымалдуулугун баалоо ыкмасы сунушталат. Бул ыкма Лапластын интегралдык теоремасына негизделген, ал чоң үлгүлөрдө Бернуллинин формуласынын чектөөлөрүн жеңүүгө мүмкүндүк берет. Методология бөлүштүрүүнүн асимптотикалык жүрүм-турумун талдоону жана чектик шарттарды эсептөө үчүн Лапластын функциясын колдонууну камтыйт. 400 элементтен турган үлгү менен жүргүзүлгөн эксперименттер, окуянын ыктымалдуулугу 0,1 болгондо, 0,03 четтөөсү 0,9544 ыктымалдуулук менен жетишиле тургандыгын көрсөттү. Маалыматтардын көлөмүн көбөйтүү болжолдоонун тактыгын сактоо менен баалоонун дисперсиясын азайтаары көрсөтүлгөн. Иштелип чыккан ыкма сапатты көзөмөлдөө жана тобокелдиктерди талдоо маселелеринде статистикалык моделдөөнүн мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтет.

Түйүндүү сөздөр: статистикалык четтөөлөр, асимптотикалык жүрүм-турум, Лапластын функциясы, чектик шарттар, баалоонун дисперсиясы, болжолдоонун тактыгы, көз каранды эмес сыноолор, эмпирикалык көрсөткүчтөр, эсептөө ресурстары, статистикалык моделдөө

Аалиева Б. А.
БГУ им. К. Карасаева,
ст. преподаватель

Абдыкеримова А. Т.
БГУ им. К. Карасаева,
преподаватель

МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОТЛИЧИЯ ОТ ПОСТОЯННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Аннотация

Современные задачи обработки больших данных требуют методов оценки статистических отклонений. Предлагается метод оценки вероятности отклонения относительной частоты события от постоянного значения при независимых испытаниях. Подход основан на интегральной теореме Лапласа, которая позволяет преодолеть ограничения формулы Бернулли при больших выборках. Методология включает анализ асимптотического поведения распределения и применение функции Лапласа для расчета граничных условий. Эксперименты с выборкой из 400 элементов показали, что при вероятности события 0,1 отклонение в 0,03 достигается с вероятностью 0,9544. Показано, что увеличение объёма данных снижает дисперсию оценок при сохранении точности прогноза. Разработанный метод расширяет возможности статистического моделирования в задачах контроля качества и анализа рисков.

Ключевые слова: статистические отклонения, асимптотическое поведение, функция Лапласа, граничные условия, дисперсия оценок, точность прогноза, независимые испытания, эмпирические показатели, вычислительные ресурсы, статистическое моделирование

Aalieva B. A.
BSU K. Karasaev, Bishkek,
Lecturer

Abdykerimova A. T.
BSU K. Karasaev, Bishkek,
Lecturer

METHOD OF USING LAPLACE'S INTEGRAL THEOREM TO FIND THE PROBABILITY OF DIFFERENCE FROM THE CONSTANT PROBABILITY OF RELATIVE FREQUENCY IN INDEPENDENT TRIALS

Abstract

Modern big-data tasks require methods for evaluating statistical deviations. This study proposes a method to estimate the probability of relative frequency deviation from a constant in independent trials. Using Laplace's theorem, this approach overcomes the large sample limitations of Bernoulli's formula. The methodology analyzes the distribution asymptotic behavior and applies a Laplace function to calculate the boundary conditions. Experiments with a 400-element sample showed that, with an event probability of 0.1, a 0.03 deviation was achieved with 0.9544 probability. Increasing data volume reduces estimated variance while maintaining prediction accuracy. This method enhances statistical modeling for quality control and risk analysis.

Keywords: statistical deviations, asymptotic behavior, Laplace function, boundary conditions, variance of estimates, prediction accuracy, independent trials, empirical indicators, computational resources, statistical modeling

Лапластын интегралдык теоремасы

A окуясынын ар бир сыноодогу пайда болуусунун ыктымалдуулугу$P(A)(0<p<1)$ болсун дейли. Мындан тышкары өзүбүзгө төмөнкүдөй бир суроо коелу: A окуясынын N көз каранды эмес сыноодогу K_1 мертебеден аз эмес, K_2 мертебеден көп эмес пайда болуусунун $P_n(k_1k_2)$-ыктымалдуулугу кандайча табылат?

Биргелешпеген окуялар үчүн ыктымалдуулуктарды кошуунун теориясынын негизинде төмөнкүнү алабыз : $P_n(k_1k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} \quad P_n(K)$ (1)

Алынган (1) барабардыкка Лапластын локалдык теоремасын колдонсок,

$$P_{n(k)} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\}$$

анда төмөнкү формула келип чыгат

$$P_n(k_1k_2) \cong \sum_{k=k_1}^{k_2} \quad \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0(tk), \quad \text{мында} \quad t=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}(k_1 \le k \le k_2), \varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}} \quad (2)$$

ошондой эле $\Delta t_k = t_{k+1} - tk = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ болгондуктан,

$$P_n(k_1,k_2) \cong \sum_{k_1}^{k_2} \quad \varphi_0(tk)\Delta tk \qquad (3)$$

түрүндө жазууга болот.

Бул (3) барабардыктын оң жагындагы сумма $\varphi_0(t)$ функция үчүн интегралдык сумма болгондуктан, $n \to \propto$ да б.а $\Delta tk \to 0$ умтулгандагы чеги (предели) аныкталган интегралды берет. «Демек, санын жетишерлик чоң сан деп эсептеп, төмөнкүдөй жакындатылган формулага ээ болобуз» [1, б. 57].

$$P_n(k_1k_2) \cong \int_{tk_2}^{tk_2} \quad \varphi_0(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{tk_1}^{tk_2} \quad e^{\frac{-t^2}{2}}dt \qquad (4)$$

Мында $tk_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $tk_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$. Ошентип, Лапластын теоремасынын мазмуну толугу менен баяндалды. Эми төмөнкүдөй ыктымалдуулуктун стандарттуу интегралын киргизебиз

$$\Phi_0(x)=\int_0^x \quad \varphi_0(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \quad e^{\frac{-t^2}{2}}dt \qquad (5)$$

Бул функция $\varphi_0(x)$ функциясынын баштапкы функциясы болот да, **Лапластын функциясы** деп аталышы менен белгилүү. Ньютон-Лейбництин формуласынын негизинде (4) барабардыктан төмөнкүнү жаза алабыз:

$$P_n(k_1k_2) \cong \Phi_0(tk_2)-\Phi_0(tk_1) \qquad (6)$$

Эскерте кетүү керек, $\Phi_0(x)$ интегралы элементардык функциялар аркылуу туюнтулбайт.

Мисалы: Тетиктин текшерүүдөн өтпөө ыктымалдыгы 0,2 экендиги берилген. Эми, 400 тетиктен 70тен 100гө чейинки тетиктер текшерүүдөн өтпөй калуу ыктымалдыгын тапсак.

$$P_{400}(70,100) \cong \Phi(2,5)-\Phi(1,25)=0,3944+0,4938=0,8882$$

Эми төмөнкүдөй маселеге токтолобуз.

Маселе: А окуясынын n көз каранды эмес сыноолордун ар бириндеги ыктымалдуулугу $P = P(A)(0 < P < 1)$ деп берилген болсун. A окуясынын $\frac{m}{n}$-салыштырмалуу жыштыгы менен анын туруктуу ыктымалдуулугунун арасындагы айырма абсолюттук мааниси боюнча берилген $E > 0$ санынын чоң болбошу ыктымалдыгын табабыз.

Бул ыктымалдуулукту төмөндөгүдөй белгилейбиз: $P\left(|\frac{m}{n} - P|\right) \leq E$

$|\frac{m}{n} - P| \leq E - ne \leq m - np \leq ne$ барабарсыздыгын өзүнө тең күчтө болгон барабарсыздыктары менен алмаштырууга болот. Акыркы барабарсыздыкты $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ санына көбөйтүп төмөнкүнү алабыз:

$-E\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq +E\sqrt{\frac{n}{pq}}$. «Анда бул барабарсыздыкты пайдаланып, Лапластын төмөнкү

$$P_{n(k)} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\}$$

теоремасынын негизинде изделген ыктымалдуулукту табабыз» [2, 20 б.].

$$P\left(-E\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq E\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-e\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{e\sqrt{\frac{n}{pq}}} \quad e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 2\Phi\left(E\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Мисал: Тетиктин стандарттуу эместигинин ыктымалдуулугу P=0,1 400 тетиктин ичинен стандарттуу эмес тетиктердин пайда болуусунун салыштырмалуу жыштыгы менен 0,1 санынын ортосундагы айырма 0,03 дон чоң болбой тургандыгынын ыктымалдуулугун тапсак , б.а $P\left(|\frac{m}{n} - 0{,}1| \leq 0{,}03\right)$ =?

Чыгаруу: $2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$
95%ке барабар.

Дагы эле, көз каранды эмес n сыноонун ар биринде. A окуясынын ыктымалдыгы туруктуу P санына $(0 < P < 1)$ барабар, деп эсептейбиз. m/n салыштырма жыштыктын туруктуу P ыктымалдуулугунан айырмасы, абсолюттук чоңдугу боюнча берилген кичине $\varepsilon > 0$ санынан ашпастыгынын ыктымалдуулугун табалы. Башкача айтканда,

$$\left|\frac{m}{n} - P\right| \leq \varepsilon \qquad (7)$$

Барабарсыздыгынын ыктымалдуулугун табалы. «Бул ыктымалдыкты $P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)$ түрүндө белгилейбиз (9) барабарсыздыгын ага тең күчтөгү $-\varepsilon\le\frac{m}{n}-P\le\varepsilon$ барабарсыздыктар менен алмаштырабыз» [3, б. 61].

Бул кош барабарсыздыкты $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ оң санына көбөйтүп, ага тең күчтөгү $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ барабарсыздыктарын алабыз.

Лапластын интегралдык теоремасын пайдаланабыз: $x_1=-\varepsilon\sqrt{n/pq}$ жана $x_2=\varepsilon\sqrt{n/pq}$ деп алсак, $P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{npq}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{hq}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varepsilon}^{2}\frac{\sqrt{n/pq}}{\sqrt{n/pq}}e^{-z^2 2}dz=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ болот.

Эми, кашаанын ичиндеги барабарсыздыктарды, тең күчтөгү баштапкы барабарсыздыктар менен алмаштырсак $P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ келип чыгат. Ошентип, $|m/n-P|\le\varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылуу ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө, Лапластын функциясынын $x=\varepsilon\sqrt{n/pq}$ болгондогу эки эселенген маанисине барабар

1-мисал. Тетиктин стандарттуу эместигинин ыктымалдыгы $P=0{,}1$. Кокустан тандалып алынган 400 тетиктен, стандарттуу эмес тетик чыгышынын салыштырма жыштыгы, $P=0{,}1$ ыктымалдуулугунан абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,03-тен ашык эмес айрымаланышынын ыктымалдуулугун тапкыла.

Чыгаруу: «Шарт боюнча $n=400,\ p=0{,}1;\ q=0{,}9;\ \varepsilon=0{,}03.$ $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le0{,}03\right)$ ыктымалдуулугун табу талап кылынат. $P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ формуласын пайдаланып $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le0{,}03\right)\approx2\Phi\left(0{,}03\sqrt{400/0{,}1\cdot0{,}9}\right)=2\Phi(2)$ болоорун табабыз, Ф(2)=0,4772 экендигин таап, изделип жаткан ыктымалдуулук 0,9544 болорун эсептеп чыгабыз» [4, б. 203].

2-мисал. Тетиктин стандарттуу эместигинин ыктымалдуулугу $P=0{,}1$. Тандалып алынган тетиктерден стандарттуу эмес тетиктер чыгышынын салыштырма жыштыгы, туруктуу $P=0{,}1$ ыктымалдуулугунан, абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,03-төн ашпаган айырмадан айырмаланат деп, 0,9544-кө барабар ыктымалдыкта айтууга мүмкүн болуш үчүн канча тетик тандап алышыбыз керек?

Чыгаруу: Шарт боюнча $P_1 = 0{,}1;\; q = 0{,}9;\; \varepsilon = 0{,}03.$ $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) \le 0{,}9544$ n-ди табу талап кылынат. $P\left(\left|\frac{m}{n} - P\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ формуласын пайдаланып шарт боюнча $2\Phi\left(0{,}03\sqrt{n/0{,}1\cdot 0{,}9}\right) = 0{,}9544$ же $2\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772$ $P = 0{,}1$ $0{,}1\sqrt{n} = 2$. Мында $n = 400$ келип чыгат. Алынган жыйынтыктын мааниси мындай: эгерде, ар биринде 400 тетик тандалып алына турган, жетишерлик көп сандагы сыноо жүргүзсөк, анда бул сыноолордун болжол менен 95,44%-инде стандарттуу эмес тетик чыгуунун салыштырма жыштыгынын, туруктуу $P = 0{,}1.$ ыктымалдыктан айырмасы, абсолюттук чоңдугу боюнча, 0,03төн чоң эмес болот, б.а. салыштырма жыштык 0,07ден (0,1-0,03=0,07) 0,03кө (0,1+0,03=0,13) чейинки чектерде болот.

«Бул сыноолордун 95,44%да стандарттуу эмес тетиктердин саны 28 ден (400дүн 7%ы) 52 ге (400дүн 13%ы) чейин болот дегенди түшүндүрөт» [5. б.19].

Эгерде, 400 тетиктен турган бир гана сыноо жүргүзсөк, анда бул сыноодогу стандарттуу эмес тетиктердин саны 28ден аз эмес жана 85ден көп эмес деп, чоң ишеним менен айтсак болот.

Стандарттуу тетиктердин саны 28ден аз, 52ден көп болуп калышы, эң аз ыктымалдуулукта болуусу дагы, мүмкүн.

Адабияттар

1. Гмурман, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. / В.А. Гмурман. Москва : Юрайт, 2009 — 479 б.
2. Мамбеткулов, Ж. Ыктымалдуулук теориясы курсу боюнча лекциялар жыйнагы / Ж. Мамбеткулов, А. Качкыналиев. – Бишкек : Кыргыз айыл чарба институтунун басмаканасы, 1993 — 20 б.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. / Д.Т. Письменный.– Москва : Айрис-пресс, 2008 — 249 б.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах Часть II. / П. Е. Данко. – Москва : Высшее образование, 2010 — 418 с.
5. Осмонова, Ч.О. Ыктымалдыктар теориясы боюнча окуу-методикалык колдонмо жана маселелер жыйнагы. / Ч.О. Осмонова. – Бишкек : Кыргыз айыл чарба институтунун басмаканасы, 1996 — 19 б.