

УДК 517.956.8

DOI 10.35254/bsu/2024.70.13

*Мырзапаязова З. К.*  
КГТУ им.И.Раззакова,  
ст. преподаватель

*Аалиева Б. А.*  
БГУ им. К. Карасаева,  
ст. преподаватель

*Абдырасулова Ч. А.*  
КГТУ им.И.Раззакова,  
преподаватель

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ОДНОЙ ОБРАТНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### Аннотация

В данной работе рассматривается обратнo-краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с нелинейной правой частью методом дополнительного аргумента установлена эквивалентность обратнo-краевых задач к системе интегральных уравнений. Получено условие разрешимости обратнo-краевых задач. Доказана теорема существования и единственности решения и получено единственное ограниченное решение обратнo-краевой задачи. Метод позволяет эффективно определять неизвестные функции при заданных краевых условиях, что является ключевым для решения сложных математических моделей. Анализируются условия сходимости и стабильности решений, а также рассматриваются различные типы нелинейных уравнений. Результаты показывают, что данный подход значительно упрощает процесс нахождения решений и расширяет возможности анализа, что имеет важное значение для прикладных задач.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, уравнения Уизема, операторно-дифференциальные системы, сходимость решений, условия Липшица, метод последовательных приближений, теорема существования, система интегральных соотношений, условия согласования, функциональный анализ

*Мырзапаязова З. К.*  
И.Раззаков атындагы КМТУ,  
ага окутуучу

*Аалиева Б. А.*  
К.Карасаев атындагы БМУ,  
ага окутуучу

*Абдырасулова Ч. А.*  
И.Раззаков атындагы КМТУ  
окутуучу

## КОШУМЧА АРГУМЕНТ МЕТОДУНУН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЦИЯ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРГЕ БИР АРТЫ ЧЕК ЭМЕС МАСЕЛЕСИНЕ КОЛДОНУУ

### Аннотация

Бул эмгекте биринчи тартиптеги сызыктуу эмес жарым-чарым интегро-дифференциалдык теңдеменин сызыктуу эмес оң жагы менен тескери чек аралык маселеси каралат. Кошумча аргумент ыкмасын колдонуу менен тескери чек аралык маселелердин интегралдык теңдемелер системасына эквиваленттүүлүгү аныкталган. Чечилүүчүлүк шарты алынып, чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Бул ыкма берилген чек аралык шарттарда белгисиз функцияларды натыйжалуу аныктайт, бул татаал математикалык моделдерди чечүү үчүн маанилүү. Жыйынтыктардын жана туруктуулук шарттарынын жакындашуусу талданып, ар кандай сызыктуу эмес теңдемелер каралат. Натыйжалар көрсөткөндөй, бул ыкма чечимдерди табуу процессин жөнөкөйлөтөт жана колдонмо маселелер үчүн талдоо мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтет. Бул изилдөө математикалык моделдөөнүн жаңы ыкмаларын иштеп чыгууга жана татаал системаларды талдоого олуттуу салым кошот.

**Түйүндүү сөздөр:** математикалык моделдөө, Уздем теңдемелери, оператордук-дифференциалдык системалар, чечимдердин жыйналышы, Липшиц шарттары, ырааттуу жакындатуу ыкмасы, жашоо теоремасы, интегралдык мамилелер системасы, шайкештик шарттары, функционалдык талдоо

*Myrzapayazova Z. K.*

*KSTU named after I. Razzakov,  
lecturer*

*Aalieva B. A.*

*BSU named after. K. Karasaeva,  
lecturer*

*Abdyrasulova Ch. A.*

*KSTU named after I. Razzakov,  
lecturer*

## APPLICATION OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT TO ONE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

### Abstract

This study examines an inverse boundary value problem for a first-order nonlinear partial integro-differential equation with a nonlinear right-hand side. Using the method of additional arguments, the equivalence of inverse boundary value problems to a system of integral equations is established. A solvability condition was obtained, and the existence and uniqueness of the solution were proven. This method effectively determines unknown functions under given boundary conditions, crucial for solving complex mathematical models. The convergence and

stability conditions were analyzed. The results show that this approach simplifies the process of finding solutions and expands the possibilities of analysis for engineering applications.

**Keywords:** mathematical modeling, Whitham equations, operator-differential systems, convergence of solutions, Lipschitz conditions, method of successive approximations, existence theorem, system of integral relations, consistency conditions, functional analysis

В книге М.И. Иманалиева методом дополнительного аргумента исследуется операторно-дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием [1, с. 112]. В работах, представленных в книгах М.И. Иманалиева и С.Н. Алексеенко, этим же методом рассматриваются вопросы разрешимости начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений и систем интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема [2, с. 414-1115]. В книгах Асанова А., Сулайманова Б.Э., Пахырова З.П. и Сулайманова Б.Э., Мырзапаязова З.К. рассматривается обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, и методом дополнительного аргумента исследуются вопросы разрешимости обратной задачи для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [4-5, с. 74-79]. В книге Алексеенко С.Н. и Эгембердиева Ш.А. с использованием метода дополнительного аргумента исследуется краевая задача для нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [6, с. 161-169]. В работах Асанова А. и Мырзапаязова З.К. методом дополнительного аргумента исследуется обратно-краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с линейными правыми частями [7, с. 485-488].

Рассмотрим уравнение:

$$u_x(t, x) + \left[ \int_0^x \mu(t, \xi) d\xi + g(t) \right] u_x(t, x) = \lambda(t) f(t, x, u(t, x)), t \in [0, T], x \in [0, X], \quad (1)$$

С начальным условием,

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, X] \quad (2)$$

и краевыми условиями,

$$u(t, 0) = \beta(t), \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u(t, X) = \psi(t), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

где,  $g(t), f(t, x, u), \varphi(x), \beta(t), \psi(t)$  – известные функции, а  $u(t, x), \lambda(t)$  – неизвестные функции. Выполняются условия согласования:

$$\psi(0) = \beta(0), \varphi(X) = \psi(0).$$

Предположим, выполнение следующих условий:

а)  $\varphi(x) \in C^2[0, X]$ ,  $g(t) \in C^2[0, T]$ ,  $f(t, x, u) \in C^{0,2,2}([0, T] \times [0, X] \times R)$ ,  $\psi(t) \in C^1[0, T]$ ,

$$\beta(t) \in C^1[0, T];$$

б) функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условию Липшица константой  $L$ , а функции  $f_x(t, x, u)$ ,  $f_u(t, x, u)$  удовлетворяют условию Липшица по аргументам  $x$  и  $u$  константой  $F$ ;

в)  $g(t) \geq \alpha > 0$ ,  $f \geq \gamma$ ,  $\psi(t) \geq \gamma \geq 0$  при всех  $t \in [0, T]$ .

Вводим новую неизвестную функцию:

$$v(t, x) = \int_0^x u(t, \xi) d\xi + g(t), \quad v_x(t, x) = u(t, x), \quad v(t, 0) = g(t). \quad (6)$$

Тогда, уравнение (1) имеет вид:

$$u_1(t, x) + v(t, x)u_x(t, x) = \lambda(t)f(t, x, u(t, x)), \quad t \in [0, T], x \in [0, X]. \quad (7)$$

В уравнение (7) применяя метод дополнительного аргумента, имеем:

$$u(s, q(s, t, x)) = \beta(z(t, x)) + \varphi \left( \int_{r(t, z(t, x))}^x \exp \left( - \int_{z(t, x)}^t u(\xi, q(\xi, t, r)) d\xi \right) d\tau \right) - \varphi(0) + \quad (*)$$

$$+ \int_{z(t, x)}^s \lambda(p)f(p, \int_{r(t, p)}^x \exp \left( \int_{z(t, x)}^x u(\xi, q(\xi, t, \tau)) d\xi \right) d\tau, \quad u(p, q(p, t, x)) dp.$$

В уравнении (\*) полагая  $u(s, q(s, t, x)) = w(s, t, x)$ , получим:

$$w(s, t, x) = \beta(z(t, x)) + \varphi \left( \int_{r(t, z(t, x))}^x \exp \left( - \int_{z(t, x)}^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) d\tau \right) - \varphi(0) + \quad (8)$$

$$+ \int_{z(t, x)}^s \lambda(p)f(p, \int_{r(t, p)}^z \exp \left( - \int_P^t w(\xi, t, r) d\xi \right) dr, \quad w(p, t, x) dp,$$

при  $(s, t, x) \in Q$ , где

$$Q = \left\{ (s, t, x): 0 \leq z(t, x) \leq s \leq t \leq T, r(t, s) \leq x \right. \\ \left. \leq X + r(t, 0) + \int_{r(t,0)}^x \left( 1 - \exp \int_0^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) d\tau \right\};$$

$$r(t, s) = \int_s^t g(r) \exp \left( \int_r^t w(\xi, t, r(t, \tau)) d\xi \right) dr, \quad \text{при } (t, s) \in D \quad (9)$$

где  $D = \{(t, s): 0 \leq s \leq t \leq T\}$ ,

$$x = \int_{z(t,x)}^t g(\tau) \exp \left( \int_\tau^t w(\xi, t, r(t, \tau)) d\xi \right) d\tau, \quad \text{при } (t, x) \in G_1, \quad (10)$$

где  $G_1 = \{(t, x): 0 \leq z(t, x) \leq t \leq T, 0 \leq r(t, 0)\}$ ,

$$z(t, x) = t - \int_0^x \left( \frac{1}{g(z(t, x))} \right) \exp \left( - \int_{z(t,x)}^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) d\tau, \quad z(t, 0) = t, \quad \text{при } t \\ \in [0, T], \quad (11)$$

$$z = (t, x) = 0 \quad \text{при } (t, x) \in G_2, \quad (12)$$

где  $G_2 = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, r(t, 0) \leq x \leq X + r(t, 0) + \int_{r(t,0)}^x \left( 1 - \exp \int_0^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) d\tau\}$ ;

$$\lambda(t) = \frac{1}{f(t, X, \psi(t))} [\psi'(t) +$$

$$+ \varphi' \left( \int_{r(t,0)}^X \exp \left( - \int_0^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) d\tau \right) \left\{ \exp \left( - \int_0^1 w(\xi, t, r(t, 0)) d\xi \right) r_t(t, 0) \right. \\ \left. + \int_{r(t,0)}^X \exp \left( - \int_0^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) u(t, \tau) d\tau \right. \\ \left. + \int_{r(t,0)}^X \exp \left( - \int_0^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) \int_0^1 w_t(\xi, t, \tau) d\xi d\tau \right\} + \quad (13)$$

$$+ \int_{p(t,p)}^X \exp \left( - \int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) u(t, \tau) d\tau + \int_{r(t,p)}^X \exp \left( - \int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi \right) d\tau \} dp - \\ - \int_0^t \lambda(p) f_u(p, \int_{r(t,p)}^X \exp \left( - \int_p^t w(\xi, t, r) d\xi \right) dr, w(p, t, X)) w_t(p, t, X) dp.$$

В (8),(9),(11),(13) взяв производную по  $t, x$ , получим:

$$w_t(s, t, x) = [\beta'(z(t, x)) - \lambda(z(t, x)) f(z(t, x), 0)] z_t(t, x) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{z(t,x)}^s \lambda(p) f_x(p, \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) d\tau, w(p, t, x)) \left[ \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, r(t,p)) d\xi\right) r_t(t, p) \right. \\
 & + \\
 & \quad + \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) u(t, r) d\tau \\
 & \quad \quad + \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) \int_p^t w_t(\xi, t, \tau) d\xi d\tau dp + \\
 & - \int_{z(t,x)}^s \lambda(p) f_u\left(p, \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) d\tau, w(p, t, x)\right) w_t(p, t, x) dp, \\
 & \quad w_t(x, t, x) = [\beta'(z(t, x)) - \lambda(z(t, x)) f(z(t, x), 0)] z_x(t, x) + \\
 & + \int_{z(t,x)}^s \lambda(p) f_x(p, \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) dr, w(p, t, x)) \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, x) d\xi\right) dp \\
 & + \tag{15} \\
 & - \int_{z(t,x)}^s \lambda(p) f_u(p, \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) dr, w(p, t, x)) w_x(p, t, x) dp. \\
 & \quad r_t(t, s) = g(r) + \int_s^t g(\tau) \exp\left(\int_\tau^t w(\xi, t, r(t, \tau)) d\xi\right) u(t, r(t, \tau)) d\tau + \\
 & \tag{16} \\
 & \quad + \int_s^t g(\tau) \exp\left(\int_\tau^t w(\xi, t, r(t, \tau)) d\xi\right) \int_\tau^t [w_t(\xi, t, r(t, \tau)) \\
 & \quad \quad + w_x(\xi, t, r(t, \tau)) r_t(t, \tau)] d\xi d\tau \\
 & z_1(t, x) = 1 + \int_0^x \frac{g'(z(t, x)) z_t(t, x)}{g^2(z(t, x))} \exp\left(-\int_{z(t,\tau)}^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) d\tau - \\
 & - \int_0^x \frac{1}{g(z(t, x))} \exp\left(-\int_{z(t,\tau)}^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) w(z(t, \tau), t, \tau) z_t(t, \tau) d\tau \\
 & \quad + \tag{17} \\
 & + \int_0^x \frac{1}{g(z(t, x))} \exp\left(-\int_{z(t,\tau)}^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) \left[ u(t, \tau) + \int_{z(t,\tau)}^t w_t(\xi, t, \tau) d\xi \right] d\tau. \\
 & z_x(t, x) \\
 & = - \frac{1}{g(z(t, x))} \exp\left(-\int_{z(t,x)}^t w(\xi, t, x) d\xi\right). \tag{18}
 \end{aligned}$$

В уравнения (8) полагая  $s = t$ , получим:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) & = \beta(z(t, x)) + \varphi\left(\int_{r(t,z(t,x))}^x \exp\left(-\int_{z(t,x)}^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) d\tau\right) - \varphi(0) + \\
 & \int_{z(t,x)}^t \lambda(p) f(p, \int_{r(t,p)}^x \exp\left(-\int_p^t w(\xi, t, \tau) d\xi\right) d\tau) dp. \tag{19}
 \end{aligned}$$

ЛЕММА. 1. Пусть функции  $w(s, t, x)$ ,  $r(t, s)$ ,  $\lambda(t)$  удовлетворяют соотношениям (8), (9), (10), (11), (12), (13), и выполнены условия А), В), С) и условия согласования (5), причем

$w(s, t, x) \in C^{1,1,1}(D)$ ,  $z(t, x) \in C^{1,1}(G_1)$ , тогда при достаточно малом  $T > 0$  и достаточно большом значении

$g(t)$  функции  $\{u(t, x), \lambda(t)\}$ , будут удовлетворять задаче (1)-(4).

Наоборот, если задача (1)-(4) имеет решение  $\{u(t, x), \lambda(t)\}$  из класса  $C^{1,1}(G) \times C[0, T]$ , выполнено условие согласования (5), функции  $z(t, x)$ ,  $r(t, s)$ ,  $q(s, t, x)$  удовлетворяют соотношениям:

$$r(t, s) = \int_s^t g(\tau) \exp\left(\int_\tau^t u(\xi, q(\xi, t, r(t, \tau))) d\xi\right) d\tau, \text{ при } (t, s) \in D, \quad (20)$$

$$q(s, t, x) = \int_{r(t, s)}^x \exp\left(-\int_s^t u(\xi, q(\xi, t, \tau)) d\xi\right) d\tau, \text{ при } (s, t, x) \in Q, \quad (21)$$

$$x = \int_{z(t, x)}^t g(r) \exp\left(\int_\tau^t u(\xi, q(\xi, t, r(t, \tau))) d\xi\right) d\tau \text{ при } (t, x) \in G_1, \quad (22)$$

$$z(t, x) = -\int_0^x (1/g(z(t, x))) \exp\left(-\int_{z(t, x)}^t u(\xi, q(\xi, t, r)) d\xi\right) d\tau, \quad z(t, 0) = t, t \in [0, T], \quad (23)$$

$$z(t, x) = 0 \text{ при } (t, x) \in G_2, \quad (24)$$

где

$$Q = \{(s, t, x): 0 \leq s \leq t \leq T, r(t, s) \leq x \leq X + r(t, 0) + \int_{r(t, 0)}^x \left(1 - \exp \int_0^t u(\xi, q(\xi, t, \tau)) d\xi\right) d\tau\}.$$

$$D = \{(t, s): 0 \leq z(t, x) \leq s \leq t \leq T, 0 \leq s \leq r(t, 0)\}, \quad G_1 = \{(t, x): 0 \leq z(t, x) \leq t \leq T,$$

$$G_2 = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, r(t, 0) \leq x \leq X + r(t, 0) + \int_{r(t, 0)}^x \left(1 - \exp \int_0^t u(\xi, q(\xi, t, \tau)) d\xi\right) d\tau\};$$

То функции  $w(s, t, x) = u(s, t, x)$ ,  $r(t, s)$ ,  $z(t, x)$ ,  $\lambda(t)$  будут удовлетворять системе соотношений (8), (9), (10), (11), (12), (13).

Доказательство леммы производится с помощью метода интегрирования по частям.

ЛЕММА2. Существует и явно определяется из исходных данных величина  $T > 0$ , такая, что система соотношений (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), имеет единственное решение  $w(s, t, x), r(t, s), z(t, x), \lambda(t), w_t(s, t, x), r_t(s, t, x), z_t(t, x), w_x(t, x)$ , причем  $w(s, t, x) \in C^{1.1.1}(Q)$ ,  $r(t, s) \in C^{1.1}(D)$ ,  $z(t, x) \in C^{1.1}(G_t)$ .

Доказательство леммы производится в помощью метода последовательных приближений.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия А), В), С) и условия согласования (5), то найдется  $T > 0$  такое, что задача (1)-(4) имеет единственное ограниченное решение  $\{u(t, x), \lambda(t)\}$  из класса  $C^{1.1}(\Pi) \times C[0, T]$ .

Доказательство теоремы следует из доказательств лемм.

### Литература

1. Иманалиев, М. И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными / АН Респ. Кыргызстан. Ин-т математики. – Бишкек : Илим, 1992. – 112 с.
2. Иманалиев, М. И. К теории нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады Академии наук. – 1992. – Т. 323. – № 3. – С. 410-414.
3. Иманалиев, М. И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С. 1111-1115.
4. Асанов, А. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений / А. Асанов, Б. Э. Сулайманов // Труды Международной научной конференции, посвященной 70-летию академика Иманалиева М. И., «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» / Вестник КГНУ. – 2001. – Сер. 3. – Вып. 6. – С. 74-79.
5. Пахыров, З. П. Об одной обратной задаче для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / З. П. Пахыров, Б. Э. Сулайманов, З. К. Мырзапаязова // Вестник КТУ им. И. Раззакова. – 2002. – № 5. – С. 165-169.
6. Алексеенко, С. Н. Применение метода дополнительного аргумента к системе нелинейных уравнений типа полной производной по времени / С. Н. Алексеенко, Ш. А. Эгембердиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек : Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 161-169.
7. Асанов, А. Об одной обратно-краевой задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / А. Асанов, З. К. Мырзапаязова // Материалы международного научно-технического симпозиума «Образование через науку», посвященного 50-летию КТУ им. И. Раззакова. – Бишкек, 2004. – Т. 1. – С. 485-488.